非線形TRSのE重なり性判定問題について(計算量理論)

松浦, 邦博; 大山口, 通夫; 太田, 義勝

数理解析研究所講究録
第 871 巻 1994 年 212-218

非線形TRSのE重なり性判定問題について

三重大学 工学部　松浦 邦博　(Kunihiro Matsuura)
三重大学 工学部　大山口 通夫 (Michio Oyamaguchi)
三重大学 工学部　太田 義勝　(Yoshikatsu Ohta)

あらまし

項書き換えシステム（以下 TRS と呼ぶ）は方向付けされた等式の集合として定義される。TRS は等式上での推論や項の簡単化などを行なうための計算モデルであり、これまで盛んに研究されてきた。TRS の重要な性質として合流性があり、これまで線形、或は停止性を満たす TRS の場合について主に研究されてきた。TRS が非線形かつ非停止の場合の合流性については最近、右定項かつ非 E 重なりな TRS は合流性を満たすという結果[2]が報告された。本研究では、右定項 TRS において非 E 重なり性を判定する問題は可解であることを示す。さらに、右定項 TRS のクラスを真に含む深さ保存的な TRS のクラスにおいて非ω重なりならば非 E 重なりであることを示す。これらの結果より、非 E 重なり性と非ω重なり性は共に右定項 TRS の合流性を保証する判定可能な十分条件である。

1. はじめに

TRS の合流性については、これまでに多くの研究がなされ、かなりの成果が得られている。TRS の合流性判定問題は一般に非可解であるが、TRS が有限停止性を満たす場合は判定可能であり、危険対の合流性の判定に還元できることが示されている。また、有限停止性を満たさない場合でも、TRS が線形である場合においては合流性を保証する十分条件がいくつか与えられている。例えば、非重なりの線形 TRS は合流性を満たす。他方、TRS が非線形かつ非停止の場合の合流性については、非重なりのときでも合流性を満たさない場合があるため、難しい問題となる。

文献[2]において、右定項(即ち、全ての規則の右辺に変数が含まれない)TRS に対して、非重なりよりも強い条件である非 E 重なりの性質を満たせば合流性を満たすことを示している。ここで、非 E 重なり性の概念は小川ら[1]によって与えられたものであり、書き換え規則の左辺に対してその真部分項の書き換えを許しても他の規則の左辺(又は、その非変数部分)と重ならないときと定義される。さらに、右定項 TRS のクラスを真に含む単純右線形 TRS のクラスにおいても非 E 重なり性を満たせば合流性を満たすことが知られている。ここで、TRS が単純右線形とは、どの規則の右辺も線形であり、かつ右辺に出現する各変数はその規則の左辺に 1 度だけ出現するときである。TRS の非 E 重なり性を判定する問題は一般に非可解であるが、右定項 TRS のクラスに限定した場合については未解決な問題であった[2]。

本研究では、右定項 TRS において非 E 重なり性を判定する問題が可解であることを示す。この非

E 重なり性は非ω重なり性(即ち、全ての規則に対して循環的な無限項を許して重ならないとき)と密接な関係があり、小川らは「非ω重なりならば非 E 重なりである」と予想した。この研究に関連した結果として各規則$\alpha \to \beta$ に対して、βが線形かつα中には同じ変数が高々2 度出現する場合、非ω重なりならば非 E 重なりであることが示された[4]。本研究では深さ保存的な TRS のクラスを導入して、TRS が深さ保存的かつ非ω重なりならば非 E 重なりであることを示す。ここで TRS が深さ保存的とは各規則$\alpha \to \beta$とβに出現する各変数 x に対して、x がβ中に出現する深さ $|u|$(但し、$\beta/u = x$ であり、複数個あれば、$|u|$ の最大のもの)は x がα中に出現する深さ $|v|$(但し、$\alpha/v = x$ であり、複数個あれば、$|v|$ の最大のもの)以下($|u| \leq |v|$)であることを満たすとき、である。この定義より、明らかに右定項 TRS は深さ保存的であるので、本研究の結果より右定項 TRS に対して非ω重なり性は非 E 重なり性を保証する十分条件(従って、合流性を保証する十分条件)である。なお、非ω重なり性はほとんど線形時間で検査できるアルゴリズムが知られている[5]。

2. 定義

以下では TRS R$=\{\alpha_i \to \beta_i | 1 \leq i \leq n\}$ とし、さらに、変数集合を V、関数記号の集合を F、項の集合を $T(F,V)$とする。また、項 Mの変数の集合を $Var(M)$、出現集合を $O(M)$、変数の出現集合を $O_{Var}(M)$、部分項の集合を $sub(M)$と表記する。出現 s に対して長さ $|s|$ をそのサイズとする。

[定義] 簡約

項 Mについて、規則$\alpha \to \beta$ と出現 u と代入θが存在して $M/u = \theta(\alpha)$ となっているとき、M は(出現 u)で簡約可能であると言う。また、$N = M[u \leftarrow \theta(\beta)]$としたとき、$M \to N$と表し、$M$は Nに簡約されると言う。このとき、u を $M \to N$のリデックス出現と言う。$\to$の反射推移閉包を$\to^*$で表す。また、$M \leftrightarrow N$で $M \leftarrow N$または $M \to N$を表す。$\leftrightarrow$の反射推移閉包を$\leftrightarrow^*$で表す。

[定義] E-系列

簡約系列$\gamma : M_1 \leftrightarrow M_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow M_n$を E-系列$\gamma$と言う。

[定義] 線形、非線形、右定項

TRS は全ての規則の左辺が線形(同じ変数が 2 つ以上出現しない)のとき、線形であると言う。そうでないとき非線形であると言う。TRS は全ての規則の右辺が線形のとき右線形であると言い、また定項(変数を含まない項) であるとき右定項であると言う。

[定義] 合流性

項 M,Nに対して $M \to^* L$ かつ $M \to^* L$ となる項 L が存在するとき、$M \downarrow N$と書く。

TRS は $M \leftrightarrow^* N$を満たす任意の項 M,N に対して $M \downarrow N$ となるとき、合流性を満たすと言う。

[定義] 重なり

項 M, Nは$\sigma(M) = \sigma'(N)$となるような代入σ, σ'が存在するとき、単一化可能と言う。

規則対$\alpha_1 \to \beta_1, \alpha_2 \to \beta_2$は、ある出現 u でα_1/u とα_2が単一化可能であるとき、重なると言う。但し、α_1/u は変数ではない。

TRS は重なる規則対が自明な場合を除いて存在しないとき、非重なりであると言う。

[定義] 強重なり

規則対$\alpha_1 \to \beta_1, \alpha_2 \to \beta_2$ は、$\theta(\overline{\alpha_1}/u) = \theta'(\overline{\alpha_2})$(但し、項 M に対して$\overline{M}$とは Mに 2 回以上出現する全ての変数に対して、それらが異なるように変数名を変えた項と定義する) となる代入θ, θ'と出現 u が存在するとき、強重なりであると言う。但し、α_1/u は変数ではない。

TRS は強重なりな規則対が自明な場合を除いて存在しないとき、非強重なりであると言う。

[定義] ω重なり

循環的な無限項を許す代入をω代入と言う。

項 M, Nは$\sigma(M) = \sigma'(N)$ となるようなω代入σ, σ'が存在するとき、ω単一化可能と言う。

規則対$\alpha_1 \to \beta_1, \alpha_2 \to \beta_2$ は、ある出現 u でα_1/u とα_2がω単一化可能であるとき、ω重なりであると言う。但し、α_1/u は変数ではない。

TRS はω重なりな規則対が自明な場合を除いて存在しないとき、非ω重なりであると言う。

[定義] E 重なり

規則対$\alpha_1 \to \beta_1,\ \alpha_2 \to \beta_2$は、$\theta(\alpha_1/u) \overset{\epsilon\text{-}inv*}{\leftrightarrow} \theta'(\alpha_2)$となるような代入$\theta, \theta'$と出現 u と出現ϵで簡約のない(ϵ-invと記す)E-系列が存在するとき E 重なりであると言う。但し、α_1/u は変数ではない。とくに、このような E-系列を E 重なり系列と言うが、$\theta(\alpha_1) \overset{\epsilon\text{-}inv*}{\leftrightarrow} \theta'(\alpha_1)$は E 重なり系列とは言わない。

TRS は E 重なり系列が存在しないとき、非 E 重なりであると言う。

4 種類の重なりの定義の包含関係

非強重なり $\Rightarrow$ 非ω重なり $\overset{?}{\Rightarrow}$ 非 E重なり $\Rightarrow$ 非重なり

但し、$\overset{?}{\Rightarrow}$は予想で、まだ証明されていないが文献[1]で成立するであろうと示唆された。

[定義] 深さ保存的

TRS R は次の条件が成立するとき、深さ保存的と言う。

$\forall \alpha \to \beta \in \mathrm{R}\ \forall x \in Var(\beta)\ MAX_{v \in O_x(\beta)}|v| \leq MAX_{u \in O_x(\alpha)}|u|$

3.結果

定理 1. TRS が深さ保存的であるとき、非ω重なりならば非 E 重なりである。

(証明の概略は付録 1 を参照)

系 1. 深さ保存的な単純右線形 TRS に対して、非ω重なり性が合流性を保証する判定可能な十分条件である。

定理 2. 右定項 TRS において、非 E 重なり性が判定可能である。

(証明の概略は付録 2 を参照)

系 2. 右定項 TRS において非 E 重なり性が合流性を保証する判定可能な十分条件である。

4. おわりに

本稿では、非線形 TRS において合流性を保証する判定可能な十分条件について考察し、右定項 TRS については非 E 重なり性と非ω重なり性が共に合流性を保証する判定可能な十分条件であることを示した。また、非ω重なり性は右定項 TRS のクラスを真に含む深さ保存的な単純右線形 TRS のクラスにおいても、合流性を保証する判定可能な十分条件であることを示した。この深さ保存的という条件が除去できるかどうかは今後の課題である。なお、非ω重なり性の判定はほとんど線形時間で検査できるアルゴリズム[5]が知られているが、右定項 TRS の非 E 重なり性を判定する効率の良いアルゴリズムが存在するかどうかは今後の課題である。

謝辞. 御討論頂いた TRS ミーティングの諸氏に感謝する。本研究は一部文部省科学研究費(05680272)の援助による。

参考文献

[1] Ogawa,M. and Ono,S.: "On the Uniquely Converging Property of Nolinear Term Rewriting System" ,情報処理学会(ソフトウェア基礎論研究会)研究報告, pp .61-70(1989.5).

[2] 大山口,太田 : "右定項-項書き換えシステムの合流性について",電子情報通信学会論文誌 D-I,j76-D-I,2,39-45 (1993).

[3] Oyamaguchi,M.:"The Reachability and Joinability Problems for Right-Ground Term-Rewriting Systems",Journal of Information Processing ,Vol.13,No.3 (1990).

[4] 張 磊 : "項書き換えシステムに関する研究",三重大学,修士論文 (1991).

[5] Alberto Martelli and Gianfranco Rossi : " Efficient Unification with infinite terms in logic Programming " ON FIFTH GENERATION COMPUTER SYSTEMS, pp. 202-209(1984).

付録1. 定理1(TRSが深さ保存的であるとき非ω重なりならば非E重なりである)の証明の概要

定理1及び2の証明に必要な定義を次にあげる。

[定義] 項の高さ $h(M)$,E-系列の高さ $H(\gamma)$,H_{min}

$h(M) = MAX_{s \in O(M)}|s|$, $H(\gamma) = MAX_{1 \leq i \leq n} h(M_i)$ (但し、$\gamma : M_1 \leftrightarrow M_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow M_n$)

$H_{min} = MIN\{H(\gamma) | \gamma$は E重なり系列である $\}$

[定義] 要素対集合

$V \times T(F,V)$ の部分集合を要素対集合と言う。要素対集合Γに対してΓ_V, Γ_Tを

$\Gamma_V = \Gamma \cap V \times V$, $\Gamma_T = \Gamma - \Gamma_V$ と定義する。また、$\sim_{\Gamma_V}$を変数上のΓ_V による同値関係とする。

[定義] Common(M,N),$\Gamma(M,N)$

Common(M,N)は項 M,Nの非変数部分の整合性をチェックするもので次のように定義される。但し、c を任意の項、$U = MIN(O_{Var}(M) \cup O_{Var}(N))$とする。

$M[u \leftarrow c | u \in U] = N[u \leftarrow c | u \in U]$ かつ $U \subseteq O(M) \cap O(N)$ のとき、Common(M,N)が真である。そうでないとき、Common(M,N)が偽である。$\Gamma(M,N)$はCommon(M,N)が真のときのみ、$\Gamma(M,N) = \{(M/u, N/u) | u \in U\}$ とする。但し、M/uが変数でない場合は、$(N/u, M/u)$を$\Gamma(M,N)$の要素とする。従って、$\Gamma(M,N)$は要素対集合である。

定理1の証明のために以下にω単一化アルゴリズムを示す。また、このアルゴリズムは文献[5]とほぼ同様な流れになっている。

[ω単一化アルゴリズム]

入力:項 M,N

出力:M,Nがω単一化可能である時成功、そうでないとき、失敗で終了する。

if Commom(M,N)=**true then begin** $\Gamma := \Gamma(M,N)$

while $\exists(x,P),(y,Q) \in \Gamma_T\ [x \sim_{\Gamma_V} y \wedge P \neq Q]$ **do begin**

if Commom(P,Q)=**true then**

$$\left.\begin{array}{l} (\overline{x},\overline{P}) = \begin{cases} (x,P) & (h(P) > h(Q)\text{のとき}) \\ (y,Q) & (\text{そうでないとき}) \end{cases} \\ \Gamma := (\Gamma - \{(\overline{x},\overline{P})\}) \cup \Gamma(P,Q) \end{array}\right\} \cdots (*)$$

else 失敗で終了する。

end 成功で終了する。

end 失敗で終了する。

また、このアルゴリズムが成功して終了した時点の要素対集合Γにおいて次のことが成立する。

$\forall(x,P),(y,Q) \in \Gamma_T \ P \neq Q$ ならば $x \not\sim_{\Gamma_X} y$

この性質を満たすΓを M,N のω単一化の解集合と言うことにする。

- 定理 1 の証明の概要

背理法によって証明する。即ち、TRS が E 重なりならば、上記のω単一化アルゴリズムを利用してω単一化の解集合をもつ規則対の存在(即ち、ω重なりな規則対の存在) を示すことによって矛盾を導く。規則対$\alpha_1 \to \beta_1, \alpha_2 \to \beta_2$と出現 u と代入θで$\gamma : \theta(\alpha_1/u) \overset{e\text{-}inv*}{\leftrightarrow} \theta(\alpha_2), H(\gamma) = H_{min}$を満たす E 重なり系列を$\gamma$とする。$\gamma$において H_{min}の最小性から削除補題[1]を適用して E-系列γを次々と変形することにより、要素対集合$\Gamma = \Gamma(\alpha_1/u, \alpha_2)$ に対して $\forall(x,M) \in \Gamma \ \exists E$-系列 $\gamma' : \theta(x) \leftrightarrow^* \theta(M), H(\gamma') < H_{min}$を満たすことが示せる。この集合Γは$\omega$単一化アルゴリズムで$\alpha_1/u, \alpha_2$ を入力したときの最初に構成する要素対集合とも一致する。次に $\exists(x,P),(y,Q) \in \Gamma_T \ x \sim_{\Gamma_V} y, P \neq Q$ を満たすとき、$\gamma'' : \theta(P) \leftrightarrow^* \theta(x) \leftrightarrow^* \theta(y) \leftrightarrow^* \theta(Q), H(\gamma'') < H_{min}$であるので、先ほどと同じ議論を適用することで P,Q から要素対集合$\Gamma'(= \Gamma(P,Q))$を作ることができる。ここで、$(\overline{x}, \overline{P})$を $h(P) > h(Q)$ が成立するならば(x,P)、そうでないなら(y,Q)と置く。さらに、$\Gamma := (\Gamma - \{(\overline{x}, \overline{P})\}) \cup \Gamma'$ のようにΓを再定義すると、この場合もω単一化アルゴリズムと同じ流れになる。このようにω単一化アルゴリズムの処理方法と同じ方法で、最終的にα_1/u とα_2のω単一化の解集合を導出することができる。よって、規則対$\alpha_1 \to \beta_1, \alpha_2 \to \beta_2$は$\omega$重なりとなり、矛盾が導かれる。

付録2. 定理2(右定項TRSにおいて非E重なり性が判定可能である)の証明の概要

次に非 E 重なり性を判定するアルゴリズムを示す。

[TRS の非 E 重なり性を判定するアルゴリズム]

入力: 右定項 **TRS R**

出力: **TRS** が非 **E** 重なりのとき **true**,そうでないとき **false**

```
for 各ω重なりの規則対 p に対して do
    begin
        for 各代入θ ∈ Sub に対して do
          begin
              if p のω単一化の解集合の全ての要素(x, M) に対してθ(x) ↓ θ(M)
                                              then return false
          end
    end
return true
```

但し、Sub は代入の有限集合で次のように定義される。

$$Sub = \left\{ \sigma \;\middle|\; \sigma : V \rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{規則の右辺の部分項の集合、又は規則の左辺の部分項で、} \\ \text{その部分項の変数を右辺の部分項で置き換えて得られた項の集合} \end{array} \right) \right\}$$

また、$\theta(x) \downarrow \theta(M)$は文献[3]の項合流性の判定アルゴリズムを用いている。

• 非 E 重なり性を判定するアルゴリズムの正当性について

まず、このアルゴリズムはω重なりな規則対の集合の有限性と Sub の有限性とω単一化の解集合の有限性と$\theta(x) \downarrow \theta(M)$の有限停止性から必ず停止する。

次に、「入力 TRS R に対してアルゴリズムは **false** を返す⇔ TRS R は E 重なりである」を示す。

以下では、要素対集合Γに対して代入θで $\forall(x, M) \in \Gamma\ \exists\ E$-系列 $\gamma : \theta(x) \leftrightarrow^* \theta(M)$ が成立するとき、$\Gamma\theta$ が真であるとする。

(**false**⇒E 重なり)

TRS R に対して **false** を返すことより、あるω単一化可能な規則対$\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2$が存在して、その$\omega$単一化の解集合$\Gamma$は代入$\theta \in Sub$ で$\Gamma\theta$が真となる。但し、出現 u でα_1/u とα_2がω単一化可能であるとする。また、α_1/u とα_2をω単一化アルゴリズムに入力したとき、**while** 文を $n(\geq 0)$回実行して要素対集合Γが得られたとする。ここで、$\Gamma_0 = \Gamma(\alpha_1/u, \alpha_2)$とし、さらに$\omega$単一化アルゴリズムの$i(1 \leq i \leq n)$回目の **while** 文の実行で得られた要素対集合をΓ_i (即ち、$\Gamma_n = \Gamma$である)とする。このとき、任意の$i(0 \leq i \leq n-1)$に対して「代入θで$\Gamma_{i+1}\theta$が真ならば$\Gamma_i\theta$も真になる」が容易に示せる。このことと$\Gamma\theta$が真であることを用いれば、$\Gamma_0\theta$が真になる。即ち、規則対$\alpha_1 \rightarrow \beta_2, \alpha_2 \rightarrow \beta_2$は$\theta(\alpha_1/u) \overset{\epsilon\text{-}inv*}{\leftrightarrow} \theta(\alpha_2)$となり、E 重なりである。

(E 重なり⇒**false**)

TRS R が E 重なりであるから、$H_{min} = H(\gamma)$ となる E 重なり系列γ が存在する。また、その E 重なり系列を$\gamma : \theta(\alpha_1/u) \overset{\epsilon\text{-}inv*}{\leftrightarrow} \theta(\alpha_2)$とする。但し、$\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2$ は規則対、θは代入、u は出現で $u \in O(\alpha_1), \alpha_1/u \notin V$を満たすとする。定理 1 の証明より、その E 重なりな規則対はω重なりとなって、そのω単一化の解集合Γが定義される。また$\forall(x, M) \in \Gamma\ \exists E$-系列$\gamma' : \theta(x) \leftrightarrow \theta(M), H(\gamma') < H_{min}$ が成立する。このとき、TRS R は右定項より $\forall(x, M) \in \Gamma\ \exists E$-系列 $\gamma'' : \theta'(x) \leftrightarrow^* \theta'(M), \overline{H}(\gamma'') < H_{min}$ を満たす Sub の要素θ'が存在することが示せる。但し、E-系列$\gamma : M_0 \leftrightarrow M_1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow M_n$に対して$\overline{H}(\gamma)$は次のように定義される。

$$\overline{H}(\gamma) = \begin{cases} H(\gamma) & (n \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

さらに、「右定項 TRS において$\gamma : M \leftrightarrow^* N, \overline{H}(\gamma) < H_{min}$となる項 M, Nに対して $M \downarrow N$」が成立することから、この代入θ'で各$(x, M) \in \Gamma$に対して$\theta'(x) \downarrow \theta'(M)$である。即ち、任意の$(x, M) \in \Gamma$に対して、項合流性を判定するアルゴリズムに$\theta'(x)$と$\theta'(M)$を入力したとき、全て成功する。よって、E 重なりな TRS R に対して非 E 重なり性を判定するアルゴリズムは **false** を返す。